$q = \frac{1}{y}$ dan $q = \frac{34}{672} \Rightarrow y = \frac{672}{34} = 19{,}76.$

$r = \frac{1}{z}$ dan $r = \frac{50}{672} \Rightarrow z = \frac{672}{50} = 13{,}44.$

Karena x, y, dan z berturut-turut menyatakan waktu yang dibutuhkan Pak Wayan, Putu, dan Gede untuk menyelesaikan 1 set pesanan ukiran. Jika bekerja secara individual, maka Pak Wayan dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 10,84 hari, Putu dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 19,76 hari, dan I Gede dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 13,44 hari. Jadi, waktu yang diperlukan Pak Wayan dan kedua anaknya untuk menyelesaikan 1 set pesanan ukiran patung dan ornamen, jika mereka bekerja secara bersama-sama adalah

$$t = \frac{1}{\left(\frac{62}{672} + \frac{34}{672} + \frac{50}{672}\right)}$$

$$= \frac{672}{146}$$

$$t = 4{,}6$$

Waktu yang diberikan turis adalah 5 hari. Berdasarkan perhitungan waktu untuk menyelesaikan keempat ukiran tersebut adalah 4,6 hari, maka pekerjaan (pesanan) tersebut dapat diterima dan dipenuhi.

- Ingat kembali pengertian sistem persamaan linear dua variabel yang telah kamu pelajari sebelumnya dan cermati pula persamaan (2.1), (2.2), dan (2.3) pada langkah penyelesaian Masalah 2.1 dan Masalah 2.2. Temukan sistem persamaan linear tiga variabel pada langkah penyelesaian Masalah 2.1 dan Masalah 2.2.
- Dari penyelesaian Masalah 2.1diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 7p + 7q = 1 \\ 6p + 6r = 1 \\ 8q + 8r = 1 \end{cases} \qquad (2.10)$$

- Dari penyelesaian Masalah 2.2 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 2y \\ 75.000x + 120.000y = 150.000z = 4.020.000 \end{cases} \quad (2.11)$$

Dengan demikian, dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1

Sistem persamaan linear tiga variabel adalah suatu sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

Notasi

Perhatikan persamaan linear

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (2.12)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad (2.13)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (2.14)$$

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (2.15)$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, x, y, dan $z \in R$, dan a_1, b_1, dan c_1 tidak sekaligus ketiganya 0 dan a_2, b_2, dan c_2 tidak sekaligus ketiganya 0, dan a_3, b_3, dan c_3 tidak sekaligus ketiganya 0.

x, y, dan z adalah variabel

a_1, a_2, a_3 adalah koefisien variabel x.

b_1, b_2, b_3 adalah koefisien variabel y.

c_1, c_2, c_3 adalah koefisien variabel z.

d_1, d_2, d_1, d_1 adalah konstanta persamaan.

Untuk lebih memahami definisi di atas, pahami contoh dan bukan contoh berikut ini. Berikan alasan, apakah sistem persamaan yang diberikan termasuk contoh atau bukan contoh sistem persamaan linear dua variabel atau tiga variabel?

Contoh 2.1

Diketahui tiga persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, $2p + 3q - r = 6$, dan $p + 3q = 3$. Ketiga persamaan ini tidak membentuk sistem persamaan linear tiga variabel, sebab persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ bukan persamaan linear. Jika persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ diselesaikan, diperoleh persamaan $z(x + y) + xy = 2xyz$ yang tidak linear. Alasan kedua adalah variabel-variabelnya tidak saling terkait.

Contoh 2.2

Diketahui dua persamaan $x = -2$; $y = 5$; dan $2x - 3y - z = 8$. Ketiga persamaan linear tersebut membentuk sistem persamaan linear tiga variabel, karena ketiga persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left.\begin{aligned} x + 0y + 0z &= -2 \\ 0x + y + 0z &= 5 \\ 2x - 3y - z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

dan variabel-variabelnya saling terkait.

Selanjutnya perhatikan beberapa sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) berikut.

1. Diberikan SPLTV $2x + 3y + 5z = 0$ dan $4x + 6y + 10z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki lebih dari satu penyelesaian. Misalnya, $(3, -2, 0)$, $(-3, 2, 0)$, dan termasuk $(0, 0, 0)$. Selain itu, kedua persamaan memiliki suku konstan nol dan grafik kedua persamaan adalah berimpit. Apabila penyelesaian suatu SPLTV tidak semuanya nol, maka SPLTV itu memiliki

penyelesaian yang tidak trivial.

2. Diektahui SPLTV $3x + 5y + z = 0$, $2x + 7y + z = 0$, dan $x - 2y + z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstan nol dan mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$. Apabila suatu SPLTV memiliki himpunan penyelesaian $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, maka SPLTV tersebut memiliki penyelesaian trivial ($x = y = z = 0$).

Dua sistem persamaan linear tiga variabel tersebut di atas merupakan sistem persamaan linear tiga variabel. Sebuah SPLTV dengan semua konstanta sama dengan nol disebut SPLTV homogen. Bila salah satu konstantanya tidak nol, maka SPLTVtersebut tidak homogen. SPLTV yang homogen memiliki dua kemungkinan, yaitu (1) hanya memiliki penyelesaian yang trivial atau (2) memiliki penyelesaian nontrivial selain penyelesaian trivial. Coba tuliskan definisi SPLTV yang homogen dan coba berikan contoh SPLTV yang homogen, selain contoh tersebut di atas.

Uji Kompetensi 2.1

A. Jawab soal-soal berikut dengan tepat.

1. Apakah persamaan-persamaan berikut ini membentuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasan atas jawabanmu.

   a. $2x + 5y - 2z = 7$ dan $2x - 4y + 3z = 3$

   b. $x - 2y + 3z = 0$ dan $y = 1$ dan $x + 5z = 8$

2. Diketahui tiga buah persamaan

   $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}=9$; $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{3}$; dan $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7$

   a. Apakah termasuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasanmu.

   b. Dapatkah kamu membentuk sistem persamaan linear dari ketiga persamaan tersebut?

3. Keliling suatu segitiga adalah 19 cm. Jika panjang sisi terpanjang adalah dua kali panjang sisi terpendek dan kurang 3 cm dari jumlah sisi lainnya. Tentukan panjang setiap sisi-sisi segitiga tersebut.

4. Harga tiket suatu pertunjukkan adalah Rp60.000,00 untuk dewasa, Rp35.000,00 untuk pelajar, dan Rp25.000,00 untuk anak di bawah 12 tahun. Pada pertunjukkan seni dan budaya telah terjual 278 tiket dengan total penerimaan Rp130.000.000,00. Jika banyak tiket untuk dewasa yang telah terjual 10 tiket lebih sedikit dari dua kali banyak tiket pelajar yang terjual. Hitung banyak tiket yang terjual untuk masing-masing tiket.

5. Seekor ikan mas memiliki ekor yang panjangnya sama dengan panjang kepalanya ditambah tiga perlima panjang tubuhnya. Panjang tubuhnya tiga perlima dari panjang keseluruhan ikan. Jika panjang kepala ikan mas adalah 5 cm, berapa panjang keseluruhan ikan tersebut?

6. Temukan bilangan-bilangan positif yang memenuhi persamaan $x + y + z = 9$ dan $x + 5y + 10z = 44$.

7. Diketahui sistem persamaan linear berikut.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x + y - z &= 2 \\ (t^2 - 4)z &= t - 2 \end{aligned}\right\}$$

Berapakah nilai t agar sistem tersebut

(a) tidak memiliki penyelesaian,

(b) satu penyelesaian,

(c) tak berhingga banyak penyelesaian?

8. Untuk suatu alasan, tiga pelajar Anna, Bob, dan Chris mengukur berat badan secara berpasangan. Berat badan Anna dan Bob 226 kg, Bob dan Chris 210 kg, serta Anna dan Chris 200kg. Hitung berat badan setiap pelajar tersebut.

9. Diketahui sistem persamaan sebagai berikut.

$$\begin{cases} 7a - 6b - 2c = 9 \\ 6a + 7b - 9c = -2 \end{cases}$$

Carilah nilai dari $a^2 + b^2 - c^2$.

10. Didefinisikan fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ (dikenal sebagai parabola) melalui titik $(-1, -2)$, $(1, 0)$, dan $(2, 7)$.

a) Tentukan nilai a, b, dan c.

b) Pilih tiga titik (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3) sedemikian sehingga memenuhi persamaan fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$. Mungkinkah ada persamaan parabola yang lain dan melalui (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3)? Berikan alasan untuk jawaban yang kamu berikan.

B. Soal Tantangan

Seorang penjual beras mencampur tiga jenis beras. Campuran beras pertama terdiri atas 1 kg jenis *A*, 2 kg jenis *B*, dan 3 kg jenis C dijual dengan harga Rp 19.500,00. Campuran beras kedua terdiri dari 2 kg jenis *A* dan 3 kg jenis *B* dijual dengan harga Rp 19.000,00. Campuran beras ketiga terdiri atas 1 kg jenis *B* dan 1 kg jenis *C* dijual dengan harga Rp 6,250,00. Harga beras jenis manakah yang paling mahal?

Sumber: http://www.cirebontrust.com

Projek

Cari sebuah SPLTV yang menyatakan model matematika dari masalah nyata yang kamu temui di lingkungan sekitarmu. Uraikan proses penemuan model matematika tersebut dan selesaikan sebagai pemecahan masalah tersebut. Buat laporan hasil kerjamu dan hasilnya dipresentasikan di depan kelas.

2.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Perbedaan antara sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) dengan sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) terletak pada banyak persamaan dan variabel yang digunakan. Oleh karena itu, penentuan himpunan penyelesaian SPLTV dilakukan dengan cara atau metode yang sama dengan penentuan penyelesaian SPLDV, kecuali dengan metode grafik.

Umumnya penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel diselesaikan dengan metode eliminasi dan substitusi. Berikut akan disajikan contoh menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode campuran eliminasi dan substitusi.

Contoh 2.3

Jumlah tiga bilangan sama dengan 45. Bilangan pertama ditambah 4 sama dengan bilangan kedua, dan bilangan ketiga dikurangi 17 sama dengan bilangan pertama. Tentukan masing-masing bilangan tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan

x = bilangan pertama

y = bilangan kedua

z = bilangan ketiga

Berdasarkan informasi pada soal diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$x + y + z = 45 \qquad (2.16)$$

$$x + 4 = y \qquad (2.17)$$

$$z - 17 = x \qquad (2.18)$$

Ditanyakan:

Bilangan x, y, dan z.

Kamu dapat melakukan proses eliminasi pada persamaan (2.16) dan (2.17), sehingga diperoleh

$$
\begin{array}{ll}
x + y + z &= 45 \\
x - y &= -4 \\
\hline
2x + z &= 41
\end{array} +
$$

Diperoleh persamaan baru, $2x + z = 41$ (2.19)

Lakukan proses eliminasi pada persamaan (2.18) dan (2.19), sehingga diperoleh

$$
\begin{array}{ll}
x - z &= -17 \\
2x + z &= 41 \\
\hline
3x &= 24
\end{array} +
$$

Diperoleh $3x = 24$ atau $x = \dfrac{24}{3}$ atau $x = 8$.

Lakukan proses substitusi nilai $x = 8$ ke persamaan (2.17) diperoleh

$(8) + 4 = y \Rightarrow y = 12$

Substitusikan $x = 8$ ke persamaan (2.18) diperoleh

$z - 17 = (8) \Rightarrow z = 25$

Dengan demikian, bilangan $x = 8$, bilangan $y = 12$, dan bilangan $z = 25$.

Selain metode eliminasi, substitusi, dan campuran antara eliminasi dan substitusi (kamu dapat mencoba sendiri), terdapat cara lain untuk menyelesaikan suatu SPLTV, yaitu dengan cara determinan dan menggunakan invers matriks. Namun, pada bab ini metode ini tidak dikaji.

Sekarang kita akan menemukan penyelesaian SPLTV dengan metode lain. Kita menententukan himpunan penyelesaian SPLTV secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum SPLTV yang telah ditemukan dengan mengikuti langkah penyelesaian metode eliminasi di atas untuk menemukan cara baru.

Perhatikan bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah sebagai berikut.

Perhatikan persamaan linear berikut.

$$
\begin{cases}
a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & (2.12) \\
a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & (2.13) \\
a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & (2.14)
\end{cases}
$$

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_3z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (2.15)$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, x, y, dan $z \in R$, dan a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0 dan a_2, b_2, dan c_2 tidak ketiganya 0 dan a_3, b_3, dan c_3 tidak ketiganya 0.

Langkah 1

Eliminasi variabel x dari Persamaan (2.12) dan Persamaan (2.13) menjadi

$$\begin{array}{l|l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times\ a_2 & \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \times\ a_1 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z = a_2d_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z = a_1d_2 \\ \hline (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \end{array} -$$

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \quad (2.20)$$

Langkah 2

Eliminasi variabel x dari Persamaan (2.12) dan Persamaan (2.14) menjadi

$$\begin{array}{l|l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times\ a_3 & \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \times\ a_1 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1a_3x + a_3b_1y + a_3c_1z = a_3d_1 \\ a_1a_3x + a_1b_3y + a_1c_3z = a_1d_3 \\ \hline (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \end{array} -$$

$$(a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \quad (2.21)$$

Langkah 3

Eliminasi variabel y dari Persamaan (2.20) dan Persamaan (2.21)

$$\begin{array}{l|l|} (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 & \times\ (a_3b_1 - a_1b_3) \\ (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 & \times\ (a_2b_1 - a_1b_2) \end{array}$$

Dari hasil perkalian koefisien variabel y pada (2.20) terhadap (2.21) dan hasil perkalian koefisien variabel z pada (2.21) terhadap (2.20), maka diperoleh

$$z = \frac{((a_2d_1 - a_1d_2)(a_3b_1 - a_1b_3) - (a_3d_1 - a_1d_3)(a_2b_1 - a_1b_2))}{((a_2c_1 - a_1c_2)(a_3b_1 - a_1b_3) - (a_3c_1 - a_1c_3)(a_2b_1 - a_1b_2))}$$

$$z = \frac{((a_1a_1b_3d_2 - a_1a_2b_3d_1 - a_1a_3b_1d_2) - (a_1a_1b_2d_3 - a_1a_3b_2d_1 - a_1a_2b_1d_3))}{((a_1a_1b_3c_1 - a_1a_2b_3c_1 - a_1a_1b_1c_2) - (a_1a_1b_2c_3 - a_1a_3b_2c_1 - a_1a_2b_1c_3))}$$

$$z = \frac{((a_1b_3d_2 - a_2b_3d_1 - a_3b_1d_2) - (a_1b_2d_1 - a_2b_1d_3))}{((a_1b_3c_1 - a_2b_3c_1 - a_2b_1c_2) - (a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3))}$$

$$z = \frac{((a_1b_2d_1 + a_1b_3d_2 + a_2b_1d_3) - (a_1b_2d_3 + a_3b_1d_2 + a_2b_3d_1))}{((a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3) - (a_1b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_1}$$

- Lakukan kegiatan matematisasi (mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang telah dimiliki siswa sebelumnya untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan, dan struktur-struktur yang belum diketahui).

Nilai variabel z di atas dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian koefisien-koefisien variabel x, y, dan konstanta pada sistem persamaan linear yang diketahui.

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & d_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|}$$

Petunjuk

- Jumlahkan hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis penuh dan hasilnya dikurangi dengan jumlahkan hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis putus-putus.
- Lakukan pada pembilang dan penyebut.

Dengan menggunakan cara menentukan nilai z, ditentukan nilai x dan y dengan cara berikut.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|} \qquad y = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|}$$

Diskusi

Perhatikan ciri penyelesaian untuk x, y, dan z di atas. Coba temukan pola penentuan nilai x, y, dan z, sehingga akan memudahkan menentukan penyelesaian SPLTV.

Pada langkah penyelesaian **Masalah 2.1** halaman 35 diperoleh sebuah sistem persamaan linear tiga variabel sebagai berikut.

$x + y + z = 40$

$x = 2y$

$75x + 120y + 150z = 4.020$

Dengan menerapkan cara yang ditemukan pada SPLTV di atas, tentunya kamu dengan mudah memahami bahwa

$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 75$

$b_1 = 1 \quad b_2 = -2 \quad b_3 = 120$

$c_1 = 1 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = 150$

$d_1 = 40 \quad d_2 = 0 \quad d_3 = 4.020$

Oleh karena itu, nilai x, y, dan z ditentukan sebagai berikut.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} 40 & 1 & 1 & 40 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 4.020 & 120 & 150 & 4.020 & 120 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{array}\right|} = \frac{(-8.040 + 0 + 0) - (-12.000 + 0 + 0)}{(-150 + 0 + 150) - (-300 + 0 + 120)}$$

$$= \frac{-8.040 + 12.000}{300 - 120} = \frac{3.960}{180} = 22$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 40 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 75 & 4.020 & 150 & 75 & 4.020 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{array}\right|} = \frac{(0 + 0 + 6.000) - (0 + 0 + 4.020)}{180}$$

$$= \frac{6.000 - 4.020}{180} = \frac{1.980}{180} = 11$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 40 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 4.020 & 75 & 120 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{array}\right|} = \frac{(-6.000 + 0 + 4.020) - (-8.040 + 4.800)}{180}$$

$$= \frac{-1.980 + 3.240}{180} = \frac{1.260}{180} = 7$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas diperoleh himpunan penyelesaian SPLTV tersebut adalah (22, 11, 7). Ternyata, hasilnya sama dengan himpunan penyelesaian yang diperoleh dengan metode campuran eliminasi dan substitusi sebelumnya.

Selanjutnya, dari semua penjelasan di atas dapat dituliskan definisi himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut ini.

Definisi 2.2

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga variabel adalah suatu himpunan semua *triple* terurut (x, y, z) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Uji Kompetensi 2.2

A. Jawab soal-soal berikut dengan tepat.

1. Tiga tukang cat, Joni, Deni dan Ari yang biasa bekerja secara bersama-sama. Mereka dapat mengecat eksterior (bagian luar) sebuah rumah dalam waktu 10 jam kerja. Pengalaman Deni dan Ari pernah bersama-sama mengecat rumah yang serupa dalam waktu 15 jam kerja. Suatu hari, ketiga tukang cat ini bekerja mengecat rumah serupa selama 4 jam kerja. Setelah itu, Ari pergi karena ada suatu keperluan mendadak. Joni dan Deni memerlukan tambahan waktu 8 jam kerja lagi untuk menyelesaikan pengecatan rumah. Tentukan waktu yang dibutuhkan masing-masing tukang cat, jika masing-masing bekerja sendirian.

2. Sebuah bilangan terdiri atas tiga angka yang jumlahnya 9. Angka satuannya tiga lebih daripada angka puluhan. Jika angka ratusan dan angka puluhan ditukar letaknya, maka diperoleh bilangan yang sama. Tentukan bilangan tersebut.

3. Sebuah pabrik lensa memiliki 3 buah mesin, yaitu A, B, dan C. Jika ketiganya bekerja maka 5.700 lensa dapat dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan B yang bekerja, maka 3.400 lensa dapat dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan C yang bekerja, maka 4.200 lensa dapat dihasilkan dalam satu minggu. Berapa banyak lensa yang dihasilkan tiap-tiap mesin dalam satu minggu?

4. Selesaikan sistem persamaan yang diketahui dan tentukan nilai yang dicari.

a. x, y, dan z adalah penyelesaian dari sistem persamaan

$$\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 12 \\ 2x + 5y - z &= 17 \\ 6x + 2y - 3z &= 17 \end{aligned}$$

Tentukan nilai $x^2 + y^2 + z^2$

b. x, y, dan z adalah penyelesaian dari sistem persamaan

$$
\begin{aligned}
x &+ 2y = -4 \\
2x &+ z = 5 \\
y &- 3z = -6
\end{aligned}
$$

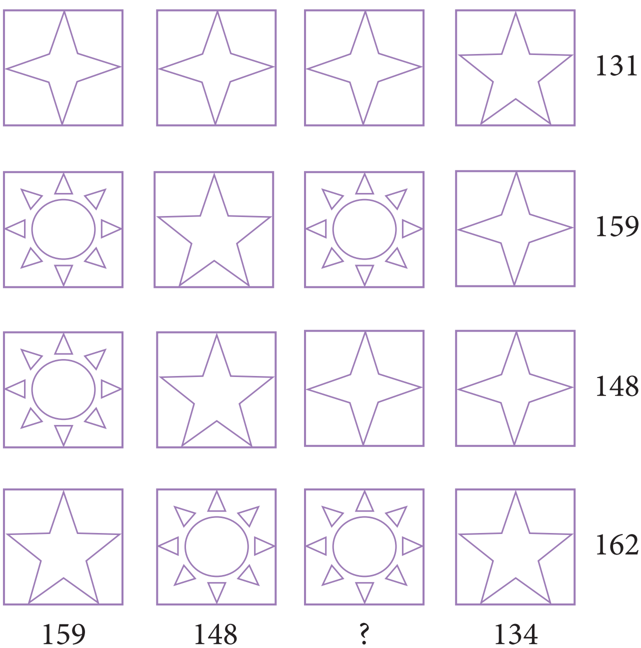
Tentukan nilai x, y, z

5. Diketahui sistem persamaan linear tiga variabel sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\
a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\
a_3x + b_3y + c_3z &= d_3
\end{aligned}
$$

Tentukan syarat yang harus dipenuhi sistem supaya memiliki penyelesaian tunggal, memiliki banyak penyelesaian, dan tidak memiliki penyelesaian.

6.



Setiap simbol pada gambar di atas mewakili sebuah bilangan. Jumlah bilangan pada setiap baris terdapat di kolom kanan dan jumlah bilangan setiap kolom terdapat di baris bawah. Tentukan bilangan pengganti tanda tanya.

7. Trisna bersama ayahnya dan kakeknya sedang memanen tomat di ladang mereka. Pekerjaan memanen tomat itu dapat diselesaikan mereka dalam waktu 4 jam. Jika Trisna bersama kakeknya bekerja bersama-sama, hanya dapat menyelesaikan pekerjaan itu dalam waktu 6 jam. Jika ayahnya dan kakeknya menyelesaikan pekerjaan tersebut, maka akan selesai dalam waktu 8 jam. Berapa waktu yang diperlukan Trisna, ayahnya, dan kakeknya untuk menyelesaikan panenan tersebut, jika mereka bekerja masing-masing?

Sumber: http://img2.bisnis.com

8. Diketahui dua bilangan, dimana bilangan kedua sama dengan enam kali bilangan pertama setelah dikurangi satu. Bilangan kedua juga sama dengan bilangan pertama dikuadratkan dan ditambah tiga. Carilah kedua bilangan tersebut.

9. Seorang pengusaha memiliki modal sebesar Rp420.000.000,00 dan membaginya dalam tiga bentuk investasi, yaitu tabungan dengan suku bungan 5%, deposito berjangka dengan suku bunga 7%, dan surat obligasi dengan pembayaran 9%. Adapun total pendapatan tahunan dari ketiga investasi sebesar Rp26.000.000,00 dan pendapatan dari investasi tabungan kurang Rp2.000.000,00 dari total pendapatan dua investasi lainnya. Tentukan besar modal untuk setiap investasi tersebut.

10. Suatu tempat parkir dipenuhi tiga jenis kendaraan yaitu, sepeda motor, mobil, dan mobil van.

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Luas parkir mobil van adalah lima kali luas parkir sepeda motor, sedangkan tiga kali luas parkir untuk mobil sama dengan luas parkir untuk mobil van dan sepeda motor. Jika tempat parkir penuh dan banyak kendaraan yang terparkir sebanyak 180, hitung banyak setiap kendaraan yang parkir.

Rangkuman

Beberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait konsep dan sifat-sifat sistem persamaan linear tiga variabel, yaitu sebagai berikut.

1. Model matematika dari permasalahan sehari-hari sering menjadi sebuah model sistem persamaan linear. Konsep sistem persamaan linear tersebut didasari oleh konsep persamaan dalam sistem bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dalam sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan linear.

2. Dua persamaan linear atau lebih dikatakan membentuk sistem persamaan linear jika dan hanya jika variabel-variabelnya saling terkait dan variabel yang sama memiliki nilai yang sama sebagai penyelesaian setiap persamaan linear pada sistem tersebut.

3. Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear adalah suatu himpunan semua pasangan terurut (x, y, z) yang memenuhi sistem tersebut.

4. Apabila penyelesaian sebuah sistem persamaan linear semuanya nilai variabelnya adalah nol, maka penyelesaian tersebut dikatakan penyelesaian trivial. Misalnya diketahui sistem persamaan linear $3x + 5y + z = 0$; $2x + 7y + z = 0$; dan $x - 2y + z = 0$. Sistem persamaan linear tersebut memiliki suku konstan nol dan mempunyai penyelesaian yang tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$.

5. Sistem persamaan linear disebut homogen apabila suku konstan setiap persamaannya adalah nol.

   a. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.

   b. Sistem tersebut mempunyai tak terhingga penyelesaian yang tak trivial sebagai tambahan penyelesaian trivial.

6. Sistem Persamaan linear (SPL) mempunyai tiga kemungkinan penyelesaian, yaitu tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai satu penyelesaian dan mempunyai tak terhingga penyelesaian.

Penguasaan kamu tentang sistem persamaan linear tiga variabel adalah prasyarat mutlak untuk mempelajari bahasan matriks dan program linear. Selanjutnya, kita akan mempelajari konsep fungsi dan trigonometri.

BAB 3

Fungsi

A. Kompetensi Dasar dan Pengalaman Belajar

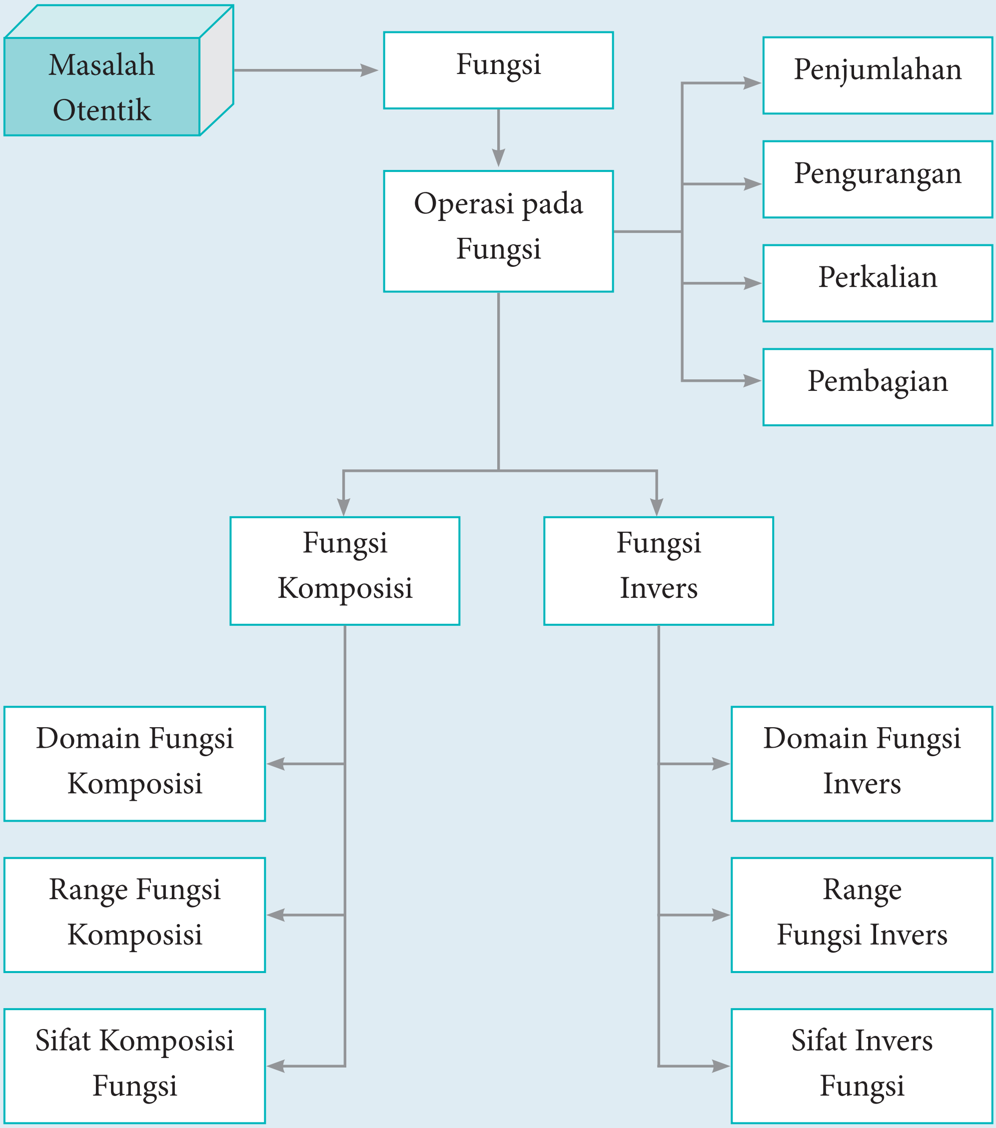
Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 3.5 Menjelaskan dan Menentukan fungsi (terutama fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi rasional) secara formal yang meliputi notasi, daerah asal, daerah hasil, dan ekspresi simbolik, serta sketsa grafiknya. 3.6 Menjelaskan operasi komposisi pada fungsi dan operasi invers pada fungsi invers serta sifat-sifatnya serta menentukan eksistensinya. 4.5 Menganalisa karakteristik masing – masing grafik (titik potong dengan sumbu, titik puncak, asimtot) dan perubahan grafik fungsinya akibat transformasi f2(x), 1/f(x), |f(x)|, dsb. 4.6 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan operasi komposisi dan operasi invers suatu fungsi.	Melalui pembelajaran materi fungsi, siswa memperoleh pengalaman belajar. ❖ Menjelaskan notasi,daerah asal, daerah hasil, dan ekspresi simbolik suatu fungsi (terutama fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi rasional) . ❖ Menentukan daerah asal, daerah hasil suatu fungsi (terutama fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi rasional). ❖ Menjelaskan konsep operasi aretmatika fungsi dan operasi komposisi fungsi. ❖ Menerapkan operasi fungsi dan komposisi fungsi dalam menyelesaikan masalah. ❖ Menemukan konsep invers fungsi dan sifat-sifat invers fungsi untuk suatu fungsi. ❖ Menemukan syarat eksistensi invers fungsi. ❖ Menyelesaikan daerah asal dan daerah hasil dari suatu masalah kontekstual.

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran fungsi, siswa mampu: 5. menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan daerah asal dan daerah hasil fungsi; 6. menyelesaikan masalah yang melibatkan operasi aritmetika dan operasi komposisi fungsi; 7. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi invers suatu fungsi.	Melalui pembelajaran materi fungsi, siswa memperoleh pengalaman belajar. ❖ Menyelesaikan fungsi invers dari masalah kontekstual.

Istilah-Istilah

- Fungsi
- Fungsi Rasional
- Fungsi Linear
- Komposisi Fungsi
- Fungsi Kuadrat
- Fungsi Invers

B. Diagram Alir

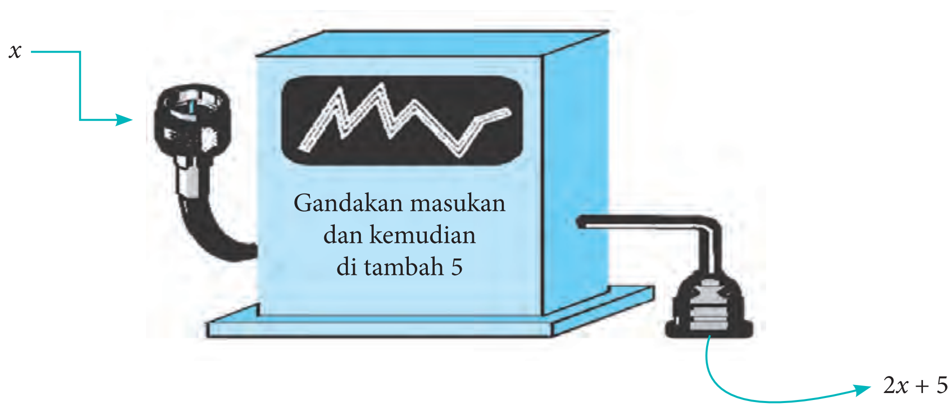


C. Materi Pembelajaran

3.1 Memahami Notasi, Domain, Range, dan Grafik Suatu Fungsi

Ingat kembali pelajaran relasi dan fungsi waktu saat kamu belajar di SMP. Ilustrasi tentang bagaimana sebuah mesin bekerja, mulai dari masukan (*input*) kemudian diproses dan menghasilkan luaran (*output*) adalah salah satu contoh bagaimana fungsi dalam matematika bekerja.

Contoh



Sumber: https://upload.wikimedia.org

Gambar 3.1 Cara kerja mesin

Berdasarkan Gambar 3.1 di atas, misalkan masukannya adalah $x = 5$, maka mesin akan bekerja dan luarannya adalah $2(5) + 5 = 15$. Mesin tersebut telah diprogram untuk menunjukkan sebuah fungsi. Jika f adalah sebuah fungsi, maka dikatakan bahwa f adalah fungsi yang akan mengubah x menjadi $2x + 5$. Contoh, fungsi f akan mengubah 2 menjadi $2(2) + 5 = 9$; fungsi f akan mengubah 3 menjadi $2(3) + 5 = 11$, dan lain sebagainya.

Fungsi tersebut dapat ditulis menjadi

$f : x \to 2x + 5$, dibaca: fungsi f memetakan x ke $2x + 5$

Bentuk penyebutan lain yang ekuivalen dengan ini adalah

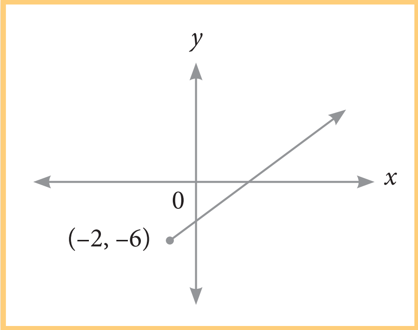
$f(x) = 2x + 5$ atau $y = 2x + 5$

Jadi, $f(x)$ adalah nilai y untuk sebuah nilai x yang diberikan, sehingga dapat ditulis $y = f(x)$ yang berarti bahwa y adalah fungsi dari x. Dalam hal tersebut, nilai dari y bergantung pada nilai x, maka dapat dikatakan bahwa y adalah fungsi dari x.

Perhatikan Gambar 3.2 di bawah ini.

Berdasarkan Gambar 3.2 (i) diperoleh beberapa hal berikut.

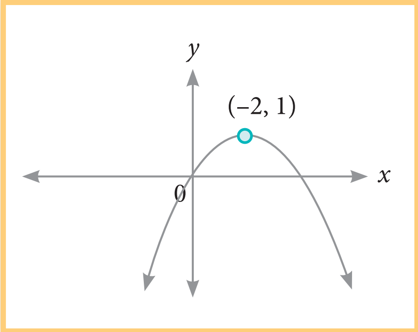
1) Semua nilai $x \geq -2$ memenuhi, sehingga daerah asalnya adalah $\{x : x \geq -2\}$ atau $x \in (-2, \infty)$.
2) Semua nilai $y \geq -6$ memenuhi, sehingga daerah hasilnya adalah $\{y : y \geq -6\}$ atau $y \in (-6, \infty)$.



Gambar 3.2 (*i*)

Berdasarkan Gambar 3.2 (*ii*) diperoleh beberapa hal berikut.

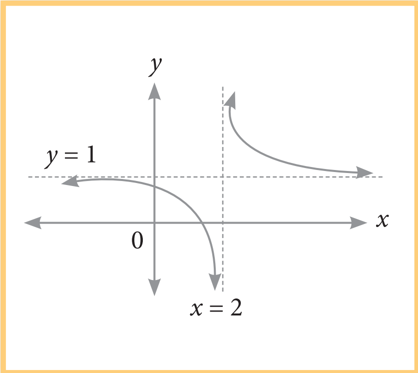
1) Semua nilai x, sehingga daerah asalnya adalah $\{x : x$ adalah bilangan real$\}$ atau $x \in \mathbb{R}$.
2) Nilai y yang memenuhi adalah $y \leq 1$ atau dengan kata lain, y tidak mungkin bernilai lebih dari satu, sehingga daerah hasilnya adalah $\{y : y \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$ atau $y \in (-\infty, 1)$.



Gambar 3.2 (*ii*)

Berdasarkan Gambar 3.2 (*iii*), diperoleh beberapa hal sebagai berikut.

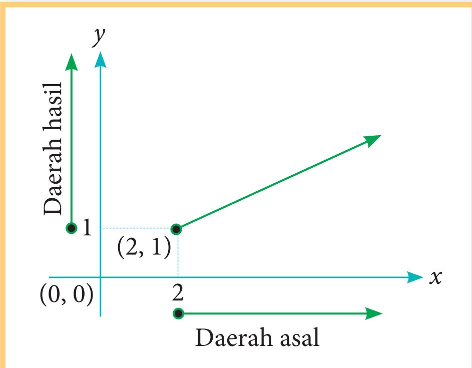
1) Semua nilai x memenuhi kecuali $x = 2$, sehingga daerah asalnya adalah $\{x : x \neq 2\}$.
2) Semua nilai y memenuhi kecuali $y = 1$, sehingga daerah asalnya adalah $\{y : y \neq 1\}$.



Gambar 3.2 (*iii*)

Daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi sebaiknya digambarkan dengan menggunakan interval fungsi.

Contoh



Gambar 3.2 (*iv*)

Daerah asal fungsi yang digambarkan pada Gambar 3.2 adalah semua bilangan real x pada interval $x \geq 2$, dapat ditulis $\{x : x \geq 2\}$ atau $x \in (2, \infty)$.

Demikian halnya untuk nilai y, daerah hasilnya adalah semua bilangan real y pada interval $y \geq 1$, dapat ditulis $\{y : y \geq 1\}$atau $y \in (1, \infty)$.

Daerah asal sebuah fungsi dapat juga ditetapkan secara jelas atau tegas (eksplisit). Misalnya, jika ditulis seperti berikut.

$f(x) = 2x^2 \qquad 0 \leq x \leq 3$

Dengan demikian daerah asal fungsinya adalah semua bilangan real x yang dibatasi dengan $0 \leq x \leq 3$. Jika daerah asal sebuah fungsi tidak ditentukan secara tegas/jelas, maka dengan kesepakatan bahwa daerah asal fungsi adalah himpunan semua bilangan real x yang membuat fungsi f terdefinisi. Sebuah fungsi f dikatakan terdefinisi pada bilangan real apabila f anggota himpunan bilangan real. Perhatikan fungsi berikut.

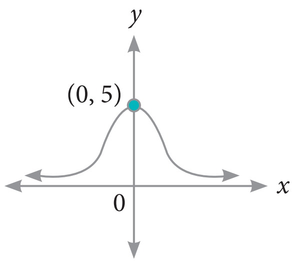
$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ dan } g(x) = \sqrt{2x}\,.$$

Fungsi f tidak terdefinisi untuk nilai x yang membuat penyebutnya bernilai 0, dalam hal ini fungsi f tidak terdefinisi pada $x = 2$. Dengan demikian, domain fungsi f adalah $\{x : x \neq 2, x \in \mathbb{R}\}$. Fungsi g tidak terdefinisi untuk x negatif, sehingga domain fungsi g adalah $\{x : x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$.

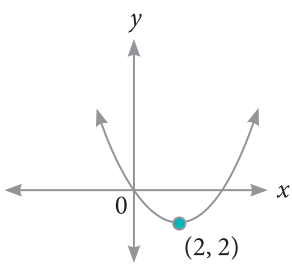
Agar kamu lebih memahami konsep daerah asal dan daerah hasil, kerjakanlah latihan berikut.

Latihan 3.1

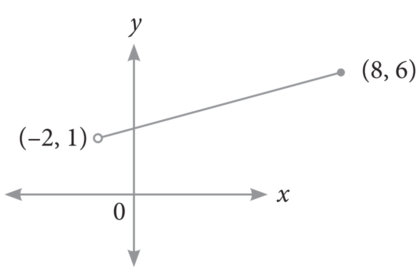
1. Tentukanlah daerah asal dan daerah hasil fungsi yang disajikan pada grafik berikut.



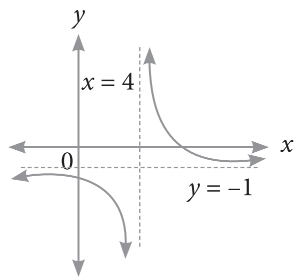
(a)



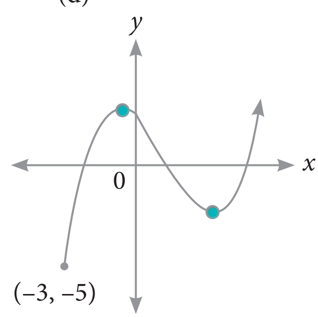
(b)



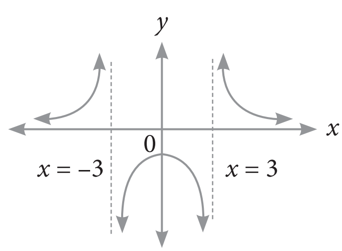
(c)



(d)



(e)



(f)

2. Tentukanlah daerah asal dan daerah hasil fungsi berikut.

a. $f(x) = 2x + 3$

b. $f(x) = x^2 - 2x - 8$

c. $f(x) = x^2 - 1 \quad 2 \leq x \leq 6$

d. $f(x) = \dfrac{2}{x(x-5)}$

e. $f(x) = \frac{x-3}{2}$

f. $h(x) = \frac{1}{x^2}$

g. $h(x) = \sqrt{x-8}$

h. $h(x) = \frac{3}{\sqrt{x-2}}$

i. $h(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{4-x}$

j. $h(x) = \sqrt{x^2+6x+9}$

3.2 Operasi Aljabar pada Fungsi

Masalah 3.1

Seorang fotografer dapat menghasilkan gambar yang bagus melalui dua tahap, yaitu tahap pemotretan dan tahap *editing*. Biaya yang diperlukan pada tahap pemotretan adalah (B_1)adalah Rp500,00 per gambar, mengikuti fungsi: $B_1(g)$ = 500g + 2.500 dan biaya pada tahap *editing*(B_2)adalah Rp100,00 per gambar, mengikuti fungsi B_2(g) = 100g + 500, dengan *g* adalah banyak gambar yang dihasilkan.

a) Berapakah total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus?

b) Tentukanlah selisih antara biaya pada tahap pemotretan dengan biaya pada tahap *editing* untuk 5 gambar.

Alternatif Penyelesaian

Fungsi biaya pemotretan: $B_1(g) = 500g + 2.500$

Fungsi biaya *editing* $B_2(g) = 100g + 500$

a) Gambar yang bagus dapat diperoleh melalui 2 tahap proses yaitu pemotretan dan *editing*, sehingga fungsi biaya yang dihasilkan adalah

$$B_1(g) + B_2(g) = (500g + 2.500) + (100g + 500)$$
$$= 600g + 3.000$$

Total biaya untuk menghasilkan 10 gambar (g = 10) adalah

$$B_1(g) + B_2(g) = 600g + 3.000$$

$$B_1(10) + B_2(10) = (600 \times 10) + 3.000$$

$$= 9.000$$

Jadi, total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp9.000,00.

b) Selisih biaya tahap pemotretan dengan tahap *editing* adalah

$$B_1(g) - B_2(g) = (500g + 2.500) - (100g + 500)$$

$$= 400g + 2.000$$

Selisih biaya pemotretan dengan biaya *editing* untuk 5 gambar (g = 5) adalah

$$B_1(g) - B_2(g) = 400g + 2.000$$

$$B_1(5) - B_2(5) = (400 \times 5) + 2.000$$

$$= 4.000$$

Jadi, selisih biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 5 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp4.000,00.

Operasi aljabar pada fungsi didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1

Jika f suatu fungsi dengan daerah asal D_f dan g suatu fungsi dengan daerah asal D_g, maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut.

1. Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
2. Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
3. Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$.

4. Pembagian f dan g ditulis $\dfrac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x|g(x) = 0\}$.

Contoh 3.1

Diketahui fungsi $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 9$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya.

a) $(f + g)$

b) $(f - g)$

c) $(f \times g)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi $f(x) = x + 3$ adalah $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ dan daerah asal fungsi $g(x) = x^2 - 9$ adalah $D_g = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$.

a) $$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x + 3) + (x^2 - 9)\\ &= x^2 + x - 6\end{aligned}$$

Daerah asal fungsi $(f + g)(x)$ adalah

$$\begin{aligned}D_{f+g} &= D_f \cap D_g\\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x \mid x \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x + 3) - (x^2 - 9)\\ &= -x^2 + x + 12\end{aligned}$$

Daerah asal fungsi $(f - g)(x)$ adalah

$$
\begin{aligned}
D_{f-g} &= D_f \cap D_g \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

c) $$
\begin{aligned}
(f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) \\
&= (x + 3) \times (x^2 - 9) \\
&= x^3 + 3x^2 - 9x - 27
\end{aligned}
$$

Daerah asal fungsi $(f \times g)(x)$ adalah

$$
\begin{aligned}
D_{f \times g} &= D_f \cap D_g \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

d) $$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \frac{x+3}{x^2 - 9} \\
&= \frac{x+3}{(x+3)\times(x-3)} \\
&= \frac{1}{x-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g \text{ dan } g(x) \neq 0 \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ dan } x^2 - 9 \neq 0\} \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ dan } (x + 3)\ (x - 3) \neq 0\} \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ dan } x \neq -3, x \neq 3\} \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -3, x \neq 3\}
\end{aligned}
$$

Latihan 3.2

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ dan $g(x) = \sqrt{x-2}$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya.

a) $(f+g)(x)$

b) $(f-g)(x)$

c) $(f \times g)(x)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

3.3 Menemukan Konsep Fungsi Komposisi

Masalah 3.2

Suatu bank di Amerika menawarkan harga tukar Dollar Amerika (USD) ke Ringgit Malaysia (MYR), yaitu 1 USD = 3,28 MYR, dengan biaya penukaran sebesar 2 USD untuk setiap transaksi penukaran. Kemudian salah satu bank terkenal di Malaysia menawarkan harga tukar ringgit Malaysia (MYR) ke Rupiah Indonesia (IDR), yaitu 1 MYR = Rp3.169,54, dengan biaya penukaran sebesar 3 MYR untuk setiap transaksi penukaran.

Seorang turis asal Amerika ingin bertamasya ke Malaysia kemudian melanjutkannya ke Indonesia dengan membawa uang sebesar 2.000 USD. Berapa IDR akan diterima turis tersebut jika pertama dia menukarkan semua uangnya ke mata uang Ringgit Malaysia di Amerika dan kemudian menukarnya ke Rupiah Indonesia di Malaysia?

Alternatif Penyelesaian

Masalah ini dapat diselesaikan dengan dua tahap penukaran.

Langkah 1

Uang sebesar 2.000 USD akan ditukar ke Ringgit Malaysia di Amerika dengan biaya penukaran sebesar 2 USD, maka jumlah uang yang diterima turis tersebut adalah

$(2.000 - 2) \times 3{,}28$ MYR = $1.998 \times 3{,}28$ MYR = 6.553,44 MYR

Langkah 2

Uang sebesar 6.553,44 MYR akan ditukar ke mata uang Rupiah Indonesia. Perlu diingat bahwa biaya penukaran sebesar 3 MYR, maka uang yang diterima turis tersebut adalah

$(6.553{,}44 - 3) \times 3.169{,}54 = 6.550{,}44 \times 3.169{,}54 = 20.761.881{,}60$ IDR

Turis tersebut menerima uang rupiah sebesar 20.761.881,60 IDR.

Perhitungan kedua transaksi di atas dapat dibuat model matematikanya ke dalam dua fungsi sebagai berikut.

Misalkan

t = jumlah uang dalam USD

x = jumlah uang dalam MYR

y = jumlah uang dalam IDR

Transaksi penukaran pertama dapat dituliskan dengan

$x = 3{,}28\ (t - 2)$

$x = 3{,}28t - 6{,}56$

Oleh karena x merupakan sebuah fungsi t, maka dapat ditulis

$$x(t) = 3{,}28t - 6{,}56 \qquad (3.1)$$

Untuk transaksi penukaran kedua dapat ditulis sebagai berikut.

$y = 3.169{,}54\ (x - 3)$

$y = 3.169{,}54x - 9.508{,}62$

Oleh karena y fungsi dari x, maka dapat ditulis

$$y(x) = 3.169{,}54x - 9.508{,}62 \qquad (3.2)$$

Dengan mensubstitusi persamaan 3.1 ke persamaan 3.2 diperoleh

$y(x) = y(x(t))$

Misalkan $f(t) = y(x(t))$, maka

$$
\begin{aligned}
f(t) &= y(x(t)) \\
&= 3.169,54\ (3,28t - 6,56) - 9.508,62 \\
&= 10.396,09t - 20792.18\ \ -9.508,62 \\
f(t) &= 10.396,09t - 30.300,80
\end{aligned}
$$

Fungsi $f(t) = y(x(t))$ ini merupakan fungsi komposisi x dan y dalam t yang dilambangkan dengan $(y \circ x)(t)$ dan didefinisikan dengan $(y \circ x)(t) = y(x(t))$.

Dengan demikian, fungsi komposisi x dan y pada masalah di atas adalah

$$(y \circ x)\ (t) = 10.396,09t - 30.300,80 \qquad (3.3)$$

Dengan menggunakan fungsi komposisi $(y \circ x)(t)$ seperti pada persamaan 3.3, maka dapat dihitung jumlah uang turis tersebut dalam mata uang rupiah Indonesia untuk $t = 2.000$ USD seperti berikut.

$$
\begin{aligned}
(y \circ x)(t) &= 10.396,09t - 30.300,80 \\
&= 10.396,09 \times (2.000) - 30.300,80 \\
&= 20.792.180 - 30.300,80 \\
&= 20.761.881,60
\end{aligned}
$$

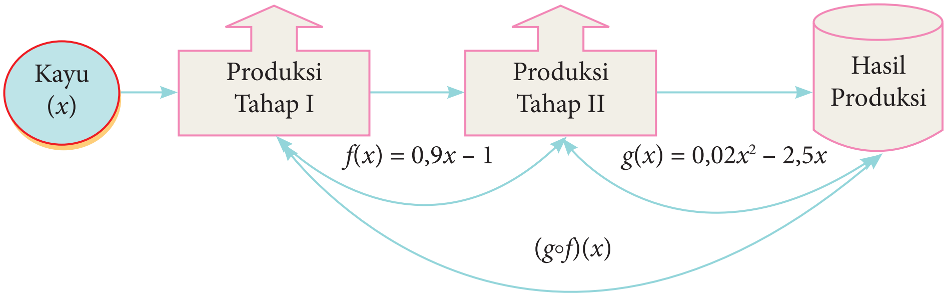
Dengan demikian, jumlah uang turis tersebut dalam rupiah adalah Rp 20.761.881,60 Perhatikan bahwa hasilnya sama dengan langkah pertama yang dilakukan di atas. Agar kamu lebih memahami fungsi komposisi, perhatikanlah masalah berikut.

Masalah 3.3

Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi. Tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan kertas. Dalam produksinya, mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 0,9x - 1$ dan mesin II mengikuti fungsi $g(x) = 0,02x^2 - 2,5x$, dengan x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton. Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 200 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (Kertas dalam satuan ton).

Alternatif Penyelesaian

Tahap-tahap produksi pabrik kertas tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.3 Tahapan produksi pabrik kertas

Dari Gambar 3.3 di atas, terlihat jelas bahwa tahap produksi kertas terdiri atas dua tahap. Hasil produksi setiap tahap dihitung sebagai berikut.

Hasil produksi tahap I

Rumus fungsi pada produksi tahap I adalah $f(x) = 0{,}9x - 1$

Untuk $x = 200$, diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}9x - 1 \\ &= 0{,}9(200) - 1 \\ &= 179 \end{aligned}$$

Hasil produksi tahap I adalah 179 ton bahan kertas setengah jadi.

Hasil produksi tahap II

Rumus fungsi pada produksi tahap II adalah $g(x) = 0{,}02x^2 - 2{,}5x$

Karena hasil produksi pada tahap I akan dilanjutkan pada produksi tahap II, maka hasil produksi tahap I menjadi bahan dasar produksi tahap II, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} g(x) &= 0{,}02x^2 - 2{,}5x \\ &= 0{,}02(179)2 - 2{,}5(179) \\ &= 640{,}82 - 447{,}5 \\ &= 193{,}32 \end{aligned}$$

Dengan demikian, hasil produksi tahap II adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Hasil produksi yang dihasilkan pabrik kertas tersebut jika bahan dasar kayunya sebanyak 200 ton adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Masalah 3.3 di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan cara yang berbeda sebagai berikut.

Diketahui fungsi-fungsi produksi berikut.

$$f(x) = 0{,}9x - 1 \tag{3.4}$$

$$g(x) = 0{,}02x^2 - 2{,}5x \tag{3.5}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 3.4 ke persamaan 3.5, diperoleh fungsi

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 0{,}02(0{,}9x - 1)^2 - 2{,}5(0{,}9x - 1) \\ &= 0{,}02(0{,}81x^2 - 1{,}8x + 1) - 2{,}5(0{,}9x - 1) \\ &= 0{,}0162x^2 - 0{,}36x + 0{,}02 - 2{,}25x + 2{,}5 \\ &= 0{,}0162x^2 - 2{,}61x + 2{,}52 \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh fungsi $g(f(x)) = 0{,}0162x^2 - 2{,}61x + 2{,}52$ (3.6)

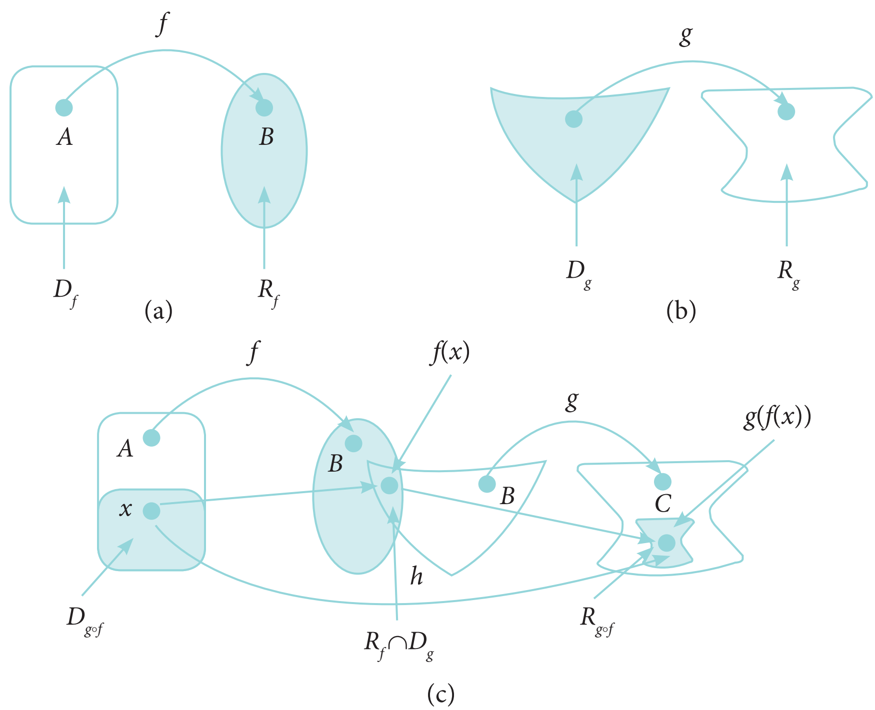
Jika disubstitusikan nilai $x = 200$ ke persamaan 3.6, diperoleh:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= 0{,}0162x^2 - 2{,}61x + 2{,}52 \\ &= 0{,}0162(200)^2 - 2{,}61(200) + 2{,}52 \\ &= 648 - 522 + 2{,}52 \\ &= 128{,}52 \end{aligned}$$

Terlihat bahwa hasil produksi sebesar 128,52 ton. Nilai ini sama hasilnya dengan hasil produksi dengan menggunakan perhitungan cara pertama di atas.

Nilai $g(f(x))$ merupakan nilai suatu fungsi yang disebut fungsi komposisi f dan g dalam x yang dilambangkan dengan $g \circ f$. Karena itu nilai $g \circ f$ di x ditentukan dengan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Perhatikan Gambar 3.4 berikut.



Gambar 3.4 Fungsi komposisi

Berdasarkan Gambar 3.4 di atas dapat dikemukakan beberapa hal berikut.

(1) D_f = daerah asal fungsi f; R_f = daerah hasil fungsi f; D_g = daerah asal fungsi g; R_g = daerah hasil fungsi g; $D_{g \circ f}$ = daerah asal fungsi komposisi $g \circ f$; $R_{g \circ f}$ = daerah hasil fungsi komposisi $g \circ f$.

(2) Fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B, ditulis f: $A \to B$.

Setiap unsur $x \in D_f$ dipetakan ke $y \in R_f$ dengan fungsi $y = f(x)$. Perhatikan Gambar 3.4(a).

(3) Fungsi g memetakan himpunan B ke himpunan C, ditulis g: $B \to C$.

Setiap unsur $y \in D_g$ dipetakan ke $z \in R_g$ dengan fungsi $z = g(y)$. Perhatikan Gambar 3.4(b).

(4) Fungsi h memetakan himpunan A ke himpunan C melalui himpunan B, ditulis h: $A \to C$. Setiap unsur $x \in D_h$ dipetakan ke $z \in h$ dengan fungsi $z = h(x)$. Perhatikan Gambar 3.4(c).

Berdasarkan beberapa hal di atas diperoleh definisi berikut.

Definisi 3.2

Jika f dan g fungsi serta $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g (ditulis $g \circ f$) yang ditentukan dengan

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

daerah asal fungsi komposisi f dan g adalah $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$, dengan

D_f = daerah asal (*domain*) fungsi f; D_g = daerah asal (*domain*) fungsi g;

R_f = daerah hasil (*range*) fungsi f; R_g = daerah hasil (*range*) fungsi g.

Pertanyaan Kitis

Untuk fungsi komposisi f dan g atau $(g \circ f)(x)$.

1) Apa akibatnya jika $R_f \cap D_g = \emptyset$? Mengapa? Jelaskan.
2) Bagaimana hubungan $D_{g \circ f}$ dengan D_f? Apakah $D_{g \circ f} \subseteq D_f$? Mengapa? Jelaskan.
3) Bagaimana hubungan $R_{g \circ f}$ dengan R_g? Apakah $R_{g \circ f} \subseteq R_g$? Mengapa? Jelaskan.

Untuk lebih memahami konsep fungsi komposisi, perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 3.2

Diketahui fungsi f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x + 1$ dan fungsi g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x^2 - 1$.

(1) Apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$dan $(f \circ g)(x)$ terdefinisi?

(2) Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$.

Alternatif Penyelesaian

$f(x) = 2x + 1$; $g(x) = x^2 - 1$

$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$; $R_f = \{y \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$D_g = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$; $R_g = \{y \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

(1) Untuk menentukan fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ terdefinisi, maka dapat diketahui berdasarkan

i. Jika $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka $(g \circ f)(x)$ terdefinisi.

$\{y \mid y \in \mathbb{R}\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \emptyset$ karena $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka $(g \circ f)(x)$ terdefinisi.

ii. Jika $R_g \cap D_f \neq 0$, maka $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.

$\{y \mid y \in \mathbb{R}\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \emptyset$ karena $R_g \cap D_f \neq \emptyset$, maka $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.

(2) Rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$dan $(f \circ g)(x)$ ditentukan dengan

i. $$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x + 1) \\ &= (2x + 1)^2 - 1 \\ &= (4x^2 + 4x + 1) - 1 \\ &= 4x^2 + 4x\end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= 2(x^2 - 1) + 1 \\ &= 2x^2 - 2 + 1 \\ &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$.

Perhatikan kembali Contoh 3.2 di atas. Contoh 3.2 tersebut diberikan untuk menentukan fungsi komposisi jika fungsi-fungsi yang lain telah diketahui. Berikut ini diberikan contoh bagaimana menentukan fungsi jika diketahui fungsi komposisi dan suatu fungsi yang lain.

Contoh 3.3

Diketahui fungsi komposisi $(g \circ f)(x) = 18x^2 + 24x + 2$ dan fungsi $g(x) = 2x^2 - 6$. Tentukanlah rumus untuk fungsi berikut.

a) Fungsi $f(x)$

b) Fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$

Alternatif Penyelesaian

$(g \circ f)(x) = 18x^2 + 24x + 2$; $g(x) = 2x^2 - 6$

a) Menentukan fungsi $f(x)$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= 18x^2 + 24x + 2 \\
\leftrightarrow 2 \times f(x)^2 - 6 &= 18x^2 + 24x + 2 \\
\leftrightarrow 2 \times f(x)^2 &= 18x^2 + 24x + 2 + 6 \\
\leftrightarrow 2 \times f(x)^2 &= 18x^2 + 24x + 8 \\
\leftrightarrow f(x)^2 &= \frac{18x^2 + 24x + 8}{2} \\
\leftrightarrow f(x)^2 &= 9x^2 + 12x + 4 \\
\leftrightarrow f(x) &= \pm\sqrt{9x^2 + 12x + 4} \\
\leftrightarrow f(x) &= \pm(3x + 2)
\end{aligned}
$$

Jadi, ada dua fungsi f yang mungkin, yaitu $f(x) = 3x + 2$ dan $f(x) = -3x - 2$.

b) Menentukan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$

i. Untuk $f(x) = 3x + 2$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= 3 \times g(x) + 2, \text{ karena } f(x) = 3x + 2 \\
&= 3 \times (2x^2 - 6) + 2 \\
&= 6x^2 - 18 + 2 \\
&= 6x^2 - 16
\end{aligned}
$$

Jadi, fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = 6x^2 - 16$

ii. $f(x) = -3x - 2$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= -3 \times g(x) - 2, \text{ karena } f(x) = -3x - 2 \\
&= -3 \times (2x^2 - 6) - 2 \\
&= -6x^2 + 18 - 2 \\
&= -6x^2 + 16
\end{aligned}
$$

Jadi, fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = -6x^2 + 16$

3.4 Sifat-Sifat Operasi Fungsi Komposisi

Untuk menentukan sifat-sifat operasi fungsi komposisi pahamilah contoh-contoh di bawah ini.

Contoh 3.4

Diketahui fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 4x + 3$ dan fungsi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x - 1$.

a) Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$.

b) Apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$? Coba selidiki.

Alternatif Penyelesaian

a) Menentukan rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$.

i.
$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(4x + 3) \\
&= (4x + 3) - 1 \\
&= 4x + 2
\end{aligned}
$$

ii.
$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(x - 1) \\
&= 4(x - 1) + 3 \\
&= 4x - 4 + 3 \\
&= 4x - 1
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, $(g \circ f)(x) = 4x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 4x - 1$.

b) Selidiki apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$.

Berdasarkan hasil perhitungan butir (a) di atas diperoleh

$(g \circ f)(x) = 4x + 2$, dan $(f \circ g)(x) = 4x - 1$

Untuk $x = 2$ diperoleh bahwa

$(g \circ f)(2) = 4(2) + 2 = 10$ dan $(f \circ g)(2) = 4(2) - 1 = 7$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa: $g \circ f$ tidak sama dengan $f \circ g$ atau $g \circ f \neq f \circ g$.

Berdasarkan Contoh 3.4 di atas, dapat disimpulkan bahwa pada umumnya sifat komutatif pada operasi fungsi komposisi tidak berlaku, yaitu $g \circ f \neq f \circ g$.

Contoh 3.5

Diketahui fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x - 1$, fungsi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = 4x + 5$, dan fungsi $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $h(x) = 2x - 3$.

a) Tentukanlah rumus fungsi komposisi $g \circ (f \circ h)$ dan $(g \circ f)\ h$.

b) Tentukanlah rumus fungsi komposisi $f \circ (g \circ h)$ dan $(f \circ g)\ h$.

c) Apakah $g\ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h$, dan $f\ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Coba selidiki.

Alternatif Penyelesaian

a) Rumus fungsi komposisi $(g \circ (f \circ h))(x)$ dan $((g \circ f) \circ h)(x)$

i) Misalkan $k(x) = (f \circ h)(x)$

$$\begin{aligned} k(x) &= f(h(x)) = 2h(x) - 1 \\ &= 2(2x - 3) - 1 \\ &= 4x - 6 - 1 \\ &= 4x - 7 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(g\circ(f\circ h)(x)) &= (g\circ k)(x)\\
&= g(k(x))\\
&= 4(k(x)) + 5\\
&= 4(4x - 7) + 5\\
&= 16x - 28 + 5\\
&= 16x - 23
\end{aligned}
$$

Jadi, fungsi komposisi $(g\circ(f\circ h)(x)) = 16x - 23$

ii) Misalkan $l(x) = (g\circ f)(x)$

$$
\begin{aligned}
l(x) &= g(f(x)) = 4(\mathrm{f}(x)) + 5\\
&= 4(2x - 1) + 5\\
&= 8x - 4 + 5\\
&= 8x + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
((g\circ f)\circ h)(x) &= (l\circ h)(x)\\
&= l(h(x))\\
&= 8(h(x)) + 1\\
&= 8(2x - 3) + 1\\
&= 16x - 24 + 1\\
&= 16x - 23
\end{aligned}
$$

Jadi, rumus fungsi komposisi $((g\circ f)\circ h)(x) = 16x - 23$.

b) Rumus fungsi komposisi $(f\circ(g\circ h))(x)$ dan $((f\circ g)\circ h)(x)$

i) Misalkan $m(x) = (g\circ h)(x)$

$$
\begin{aligned}
m(x) &= g(h(x)) = 4(h(x)) + 5\\
&= 4(2x - 3) + 5\\
&= 8x - 12 + 5\\
&= 8x - 7
\end{aligned}
$$

$(f \circ (g \circ h)(x)) = (f \circ m(x))$

$= f(m(x))$

$= 2(m(x)) - 1$

$= 2(8x - 7) - 1$

$= 16x - 14 - 1$

$= 16x - 15$

Jadi, rumus fungsi komposisi $(f \circ (g \circ h)(x)) = 16x - 15$

ii) Misalkan $n(x) = (f \circ g)(x)$

$\text{n}(x) = f(g(x))$

$= 2(4x + 5) - 1$

$= 8x + 10 - 1$

$= 8x + 9$

$((f \circ g) \circ h)(x) = (n \circ h(x))$

$= n(h(x))$

$= 8(h(x)) + 9$

$= 8(2x - 3) + 9$

$= 16x - 24 + 9$

$= 16x - 15$

Jadi, rumus fungsi komposisi $((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

c) Dari butir (a) dan butir (b), diperoleh nilai

i) $(g \circ (f \circ h)(x)) = 16x - 23$ dan $((g \circ f) \circ h)(x) = 16x - 23$

ii) $(f \circ (g \circ h)(x)) = 16x - 15$ dan $((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

Berdasarkan nilai-nilai ini disimpulkan bahwa

i) $(g \circ (f \circ h)(x)) = ((g \circ f) \circ h)(x) = 16x - 23$

ii) $(f \circ (g \circ h)(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

Dari uraian **Contoh 3.5** di atas disimpulkan bahwa sifat asosiatif berlaku pada operasi fungsi komposisi sebagai berikut.

Sifat 3.1

Diketahui f, g, dan h suatu fungsi. Jika $R_h \cap D_g \neq \emptyset$; $R_{g\circ h} \cap D_f \neq \emptyset$; $R_g \cap D_f \neq \emptyset$; $R_h \cap D_{f\circ g} \neq \emptyset$, maka pada operasi komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif, yaitu

$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$$

Contoh 3.6

Diketahui fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 5x - 7$ dan fungsi identitas I: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $I(x) = x$. Tentukanlah

a) rumus fungsi komposisi $f\circ I$ dan $I\circ f$.

b) apakah $f\circ I = I\circ f = f$. Selidikilah.

Alternatif Penyelesaian

a) Rumus fungsi komposisi $f\circ I$ dan $I\circ f$

✓ $(f\circ I)(x) = f(I(x))$
$= f(x)$
$= 5x - 7$

✓ $(I\circ f)(x) = I(f(x))$
$= I(f(x))$
$= 5x - 7$

b) Berdasarkan hasil pada butir (a) maka dapat disimpulkan bahwa

$f\circ I = I\circ f = f$

Berdasarkan penyelesaian **Contoh 3.6** diperoleh sifat berikut.

Sifat 3.2

Diketahui f suatu fungsi dan I merupakan fungsi identitas. Jika $R_I \cap D_f \neq \varnothing$, maka terdapat sebuah fungsi identitas, yaitu $I(x) = x$, sehingga berlaku sifat identitas, yaitu

$$f \circ I = I \circ f = f$$

Agar kamu lebih memahami **Sifat 3.2**, selesaikanlah latihan berikut.

Latihan 3.3

Diketahui fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \dfrac{2x-3}{5}$ dan fungsi identitas $I: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $I(x) = x$. Buktikanlah bawah $(f \circ I) = (I \circ f) = f$.

Uji Kompetensi 3.1

1. Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi, dan tahap kedua menggunakan mesin II yang menghasilkan bahan kertas. Dalam produksinya mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 6x - 10$ dan mesin II mengikuti fungsi $g(x) = x^2 + 12$, x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton.

   a) Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 50 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (Kertas dalam satuan ton).

   b) Jika bahan setengah jadi untuk kertas yang dihasilkan oleh mesin I sebesar 110 ton, berapa tonkah kayu yang sudah terpakai? Berapa banyak kertas yang dihasilkan?

2. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x-3}{x}$, $x \neq 0$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$. Tentukan rumus fungsi berikut apabila terdefinisi dan tentukan daerah asal dan daerah hasilnya.

   a) $f + g$

   b) $f - g$

   c) $f \times g$

   d) $\dfrac{f}{g}$

3. Misalkan f fungsi yang memenuhi $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} f(-x) = 2x$ untuk setiap $x \neq 0$. Tentukanlah nilai $f(2)$.

4. Diketahui fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2 - 4x + 2$ dan fungsi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = 3x - 7$. Tentukanlah

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

c) $g \circ f(5)$

d) $(f \circ g)\ (10)$

5. Jika $f(xy) = f(x + y)$ dan $f(7) = 7$. Tentukanlah nilai $f(49)$.

6. Diketahui fungsi f dan g dinyatakan dalam pasangan terurut

$f = \{(1,5), (2,6), (3,-1), (4,8)\}$

$g = \{(2,-1), (1,2), (5,3), (6,7)\}$

Tentukanlah

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

7. Jika f fungsi yang memenuhi persamaan $f(1) = 4$ dan $f(x+1) = 2\ f(x)$. Tentukanlah $f(2014)$.

8. Jika $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ dan $x^2 \neq 1$, buktikanlah bahwa $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

9. Untuk pasangan fungsi yang diberikan tentukanlah daerah asal dan daerah hasil fungsi komposisi $g \circ f$.

a) $f(x) = 2x$ dan $g(x) = \sin x$

b) $f(x) = -x$ dan $g(x) = \ln x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dan $g(x) = 2 \sin x$

10. Diketahui $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2 - 1$.Tentukanlah nilai $f(x - 2)$.

3.5 Fungsi Invers

Masalah 3.4

Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain sebesar $f(x)$ rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1.000$, dimana x banyak potong kain yang terjual.

a) Jika dalam suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 50 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?

b) Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp100.000,00 berapa potong kain yang harus terjual?

c) Jika A merupakan daerah asal (*domain*) fungsi f dan B merupakan daerah hasil (*range*) fungsi f, gambarkanlah permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas.

Alternatif Penyelesaian

Keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1.000$, untuk setiap x potong kain yang terjual.

a) Penjualan 50 potong kain, maka $x = 50$ dan nilai keuntungan yang diperoleh adalah

$f(x) = 500x + 1000$

untuk $x = 50$ berarti $f(50) = (500 \times 50) + 1.000$

$= 25.000 + 1.000$

$= 26.000$

Jadi, keuntungan yang diperoleh dalam penjualan 50 potong kain sebesar Rp26.000,00.

b) Agar keuntungan yang diperoleh sebesar Rp 100.000,00, maka banyaknya kain yang harus terjual adalah $f(x) = 500x + 1000$

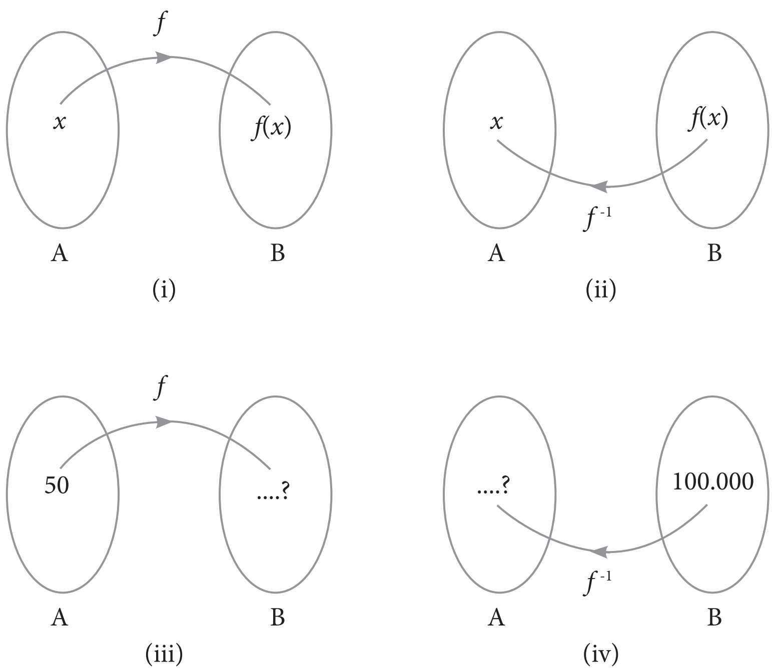
$100.000 = 500x + 1000$

$500x = 100.000 - 1.000$

$$\begin{aligned} 500x &= 99.000 \\ x &= \frac{99.000}{500} \\ &= 198 \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya kain yang harus terjual adalah 198 potong.

c) Jika A merupakan daerah asal fungsi f dan B merupakan daerah hasil fungsi f, maka permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas digambarkan seperti berikut.



Gambar 3.5 Fungsi invers

Berdasarkan Gambar 3.5 di atas, maka dapat dikemukakan beberapa hal sebagai berikut.

(a) Gambar 3.5 (i) menunjukkan bahwa fungsi f memetakan A ke B, dapat ditulis f: A $\to$ B.

(b) Gambar 3.5 (ii) menunjukkan bahwa f^{-1} memetakan B ke A, dapat ditulis f^{-1}: B $\to$ A, dimana f^{-1} merupakan fungsi invers f.